

Division euclidienne

Théorème	<p>On appelle division euclidienne l'opération qui à tout couple (a, b) avec a entier relatif et b entier naturel non nul associe le couple (q, r) avec q entier relatif et r entier naturel avec $0 \leq r < b$ tel que :</p> $a = bq + r$ <p>On appelle a le dividende, b le diviseur, q le quotient et r le reste.</p>
Exemple	<p>$87 = 10 * 8 + 7$ remarquons que nous avons bien $0 \leq 7 < 10$ Mais nous avons aussi $-87 = -9 * 10 + 3$ avec $0 \leq 3 < 10$</p>

Preuve

Montrons d'abord l'**existence** d'un tel couple :

1^{er} cas : $a \geq 0$

Soit $A = \{m \text{ tels que } bm > a\}$. Soit $m = a + 1$. $m \in A$

En effet $a + 1 > 0$ et $b(a + 1) > (a + 1)$ car $b \in \mathbb{N}^*$

A est une partie non vide de \mathbb{N} . Elle admet donc un plus petit élément. Appelons le n .

Nous avons $bn > a$ et $b(n - 1) \leq a$. Posons $q = (n - 1)$ et $r = a - bq$

$$b(n - 1) \leq a \Rightarrow a - b(n - 1) \geq 0 \Rightarrow a - bq \geq 0 \Rightarrow r \geq 0$$

Nous avons aussi :

$$bn > a \Rightarrow r = a - bq < bn - bq < b(n - q) < b(n - (n - 1)) < b$$

$$\text{Donc } 0 \leq r < b$$

2^{ème} cas : $a < 0$

Nous savons que $b \in \mathbb{N}^*$ donc $1 - b \leq 0$. Nous en déduisons que $a(1 - b) \geq 0$

Donc d'après la question précédente il existe q et r tels que

$$a(1 - b) = bq + r \text{ avec } 0 \leq r < b$$

$$a(1 - b) = bq + r \Rightarrow a - ab = bq + r \Rightarrow a = b(q + a) + r$$

Donc en posant $q' = q + a$ il vient $a = bq' + r$ avec $0 \leq r < b$

Montrons maintenant l'**unicité** d'un tel couple.

Supposons que deux couples (q, r) et (q', r') soient solutions.

Nous avons $a = bq + r$ avec $0 \leq r < b$ et $a = bq' + r'$ avec $0 \leq r' < b$

En soustrayant les deux égalités nous avons $0 = b(q - q') + r - r' \Rightarrow r - r' = b(q' - q) \Rightarrow r - r'$ multiple de b

Supposons $q' > q$

Nous avons $r - r' = b(q' - q) \Rightarrow r = r' + b(q' - q)$. Ce qui est impossible puisque $0 \leq r < b$ et $0 \leq r' < b$.

De même si $q' < q$

$r' - r = b(q - q') \Rightarrow r' = r + b(q - q')$ Ce qui est impossible puisque $0 \leq r < b$ et $0 \leq r' < b$

La seule solution réside dans $q' = q$ qui entraîne $r = r'$. Les deux couples sont donc identiques.