

Equations second degré

Equations second degré			
Théorème	Soit l'équation du second degré $P(z) = 0$ avec $P(z) = az^2 + bz + c$ avec a, b et c réels. Le calcul du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ nous amène à étudier trois cas :		
	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
	L'équation possède deux racines réelles x_1 et x_2 :	L'équation possède une racine réelle double $x_0 = -\frac{b}{2a}$	L'équation possède deux racines complexes conjuguées :
	$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$		$x_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$
Le polynôme P peut se factoriser ainsi :			
$P(z) = a(z - x_1)(z - x_2)$	$P(z) = a(z - x_0)^2$	$P(z) = a(z - x_1)(z - x_2)$	
Preuve			
$P(z) = az^2 + bz + c = a\left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right) = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right] = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$			
<ul style="list-style-type: none"> • $\Delta = 0$ $P(z) = a\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2$ et en posant $x_0 = -\frac{b}{2a}$ il vient $P(z) = a(z - x_0)^2$. $P(z) = 0 \Leftrightarrow z = x_0 = -\frac{b}{2a}$ 			
<ul style="list-style-type: none"> • $\Delta > 0$ $P(z) = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right) - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right]\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right) + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right] = a\left(z - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(z - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right)$ 			
<p>Donc :</p> $P(z) = 0 \Leftrightarrow z \in \{x_1; x_2\}$ avec $x_1 = \frac{-b + i\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b - i\sqrt{\Delta}}{2a}$			
<ul style="list-style-type: none"> • $\Delta < 0$ $P(z) = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right) - \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right]\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right) + \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right] = a\left(z - \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\left(z - \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)$ 			
$P(z) = 0 \Leftrightarrow z \in \{x_1; x_2\}$ avec $x_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$			
Exemple	Soit $P(z) = z^2 + z + 1$ $\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 = -3$. Ce polynôme admet donc deux racines : $x_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ $x_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$		
Remarque	Cas particulier de l'équation précédente, l'équation $z^2 = a$ avec $a \in \mathbb{R}^-$ admet deux racines conjuguées : $i\sqrt{-a}$ et $-i\sqrt{-a}$		