

Nombres complexes . Cours

Forme exponentielle	
Théorème	Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} par $f(\theta) = \cos \theta + i \sin \theta$ $f(0) = 1$ et $\forall(\theta, \theta') f(\theta)f(\theta') = f(\theta + \theta')$
Preuve	
$f(0) = \cos 0 + i \sin 0 = 1$ $f(\theta)f(\theta') = (\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \theta' + i \sin \theta') = (\cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta') + i(\sin \theta \cos \theta' + \cos \theta \sin \theta')$ $f(\theta)f(\theta') = \cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta') = f(\theta + \theta')$	
Définition	Par analogie avec la fonction exponentielle nous noterons désormais $f(\theta) = \cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}$
Remarque	$ e^{i\theta} = \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = 1$ et $\arg(e^{i\theta}) = \theta [2\pi]$
Définition	Nous avons déjà vu que tout nombre complexe z pouvait se mettre sous la forme. $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ avec $r = z $ et $\theta = \arg(z) [2\pi]$ Grâce à cette nouvelle notation, nous pouvons écrire $z = re^{i\theta}$ avec $r = z $ et $\theta = \arg(z) [2\pi]$ Cette écriture est appelée forme exponentielle du complexe z . Réciproquement tout nombre complexe z sous la forme $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ vérifie $r = z $ et $\theta = \arg(z) [2\pi]$.
Exemples	<ul style="list-style-type: none"> • $i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = e^{i\frac{\pi}{2}}$ • $-i = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = e^{i\frac{3\pi}{2}}$
	<ul style="list-style-type: none"> • $-1 = \cos \pi + i \sin \pi = e^{i\pi}$ • $1 = e^{i \cdot 0}$
Exemples	<ul style="list-style-type: none"> • $1 + i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ • $3\sqrt{2} + 3i\sqrt{2} = 6\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 6\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right) = 6e^{i\frac{\pi}{4}}$ • $-1 + i\sqrt{3} = 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right) = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$ • $1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$
Remarque	Attention pour avoir une forme exponentielle il faut impérativement avoir $r > 0$ Par exemple $-2e^{i\frac{\pi}{4}}$ n'est pas une forme exponentielle. Par contre en remarquant que $-2e^{i\frac{\pi}{4}} = 2e^{i(\frac{\pi}{4}+\pi)} = 2e^{i(\frac{5\pi}{4})}$ nous avons mis le nombre complexe sous sa forme exponentielle.
Propriétés	Pour tous nombre réels θ et θ' nous avons :
	1. $e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$
	2. $\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}}$
	3. $\forall k \in \mathbb{Z}, e^{i(\theta+2k\pi)} = e^{i\theta}$
	4. $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i\theta} * \frac{1}{e^{i\theta'}} = e^{i\theta}e^{-i\theta'} = e^{i(\theta-\theta')}$
Preuve	
<ol style="list-style-type: none"> 1. Cette propriété a déjà été montrée tout en haut de cette page avec $f(\theta)f(\theta') = f(\theta + \theta')$ 2. D'après la propriété précédente, $e^{i\theta}e^{-i\theta} = e^{i0} = 1 \Rightarrow e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$ De plus $e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) = \cos(\theta) - i \sin(\theta) = \overline{\cos \theta + i \sin \theta} = \overline{e^{i\theta}}$ 3. $e^{i(\theta+2k\pi)} = \cos(\theta + 2k\pi) + i \sin(\theta + 2k\pi) = \cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}$ 4. $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i\theta} * \frac{1}{e^{i\theta'}} = e^{i\theta}e^{-i\theta'} = e^{i(\theta-\theta')}$ 	
Exemples	<ul style="list-style-type: none"> • $e^{i\frac{\pi}{3}}e^{i\frac{\pi}{6}} = e^{i(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6})} = e^{i(\frac{3\pi}{6})} = e^{i(\frac{\pi}{2})} = i$ • $\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{6}}} = e^{i(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6})} = e^{i(\frac{2\pi}{6} - \frac{\pi}{6})} = e^{i(\frac{\pi}{6})}$

Propriété	Formule de Moivre : $\forall n \in \mathbb{N}, (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$ Ou : $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$
Preuve	
Par récurrence. Le cas $n = 1$ est évident. Supposons la propriété vraie à l'ordre n : $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ $(e^{i\theta})^{n+1} = e^{i\theta} (e^{i\theta})^n = e^{i\theta} e^{in\theta} = e^{i(\theta+n\theta)} = e^{i\theta(n+1)}$ La propriété est donc vraie aussi à l'ordre $n + 1$, nous en déduisons qu'elle est vraie pour tout n Nous avons donc $\forall n \in \mathbb{N}, (e^{i\theta})^n = (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta = e^{in\theta}$	
Exemple	$\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)^3 = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^3 = e^{i\pi} = -1$
Propriété	<ul style="list-style-type: none"> Egalité de deux exponentielles complexes : $e^{i\theta} = e^{i\theta'} \Leftrightarrow \theta = \theta' + 2\pi k$ Egalité de deux nombres complexes mis sous forme exponentielle. $re^{i\theta} = r'e^{i\theta'} \Leftrightarrow \begin{cases} r = r' \\ \text{et} \\ \theta = \theta' + 2\pi k \end{cases}$
Preuve	
<ul style="list-style-type: none"> $e^{i\theta} = e^{i\theta'} \Leftrightarrow \cos \theta + i \sin \theta = \cos \theta' + i \sin \theta' \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \theta = \cos \theta' \\ \text{et} \\ \sin \theta = \sin \theta' \end{cases} \Leftrightarrow \theta = \theta' + 2\pi k$ $re^{i\theta} = r e^{i\theta} = r$ et $r'e^{i\theta'} = r' e^{i\theta'} = r'$ donc $re^{i\theta} = r'e^{i\theta'} \Rightarrow r = r'$ Du coup $\cos \theta + i \sin \theta = \cos \theta' + i \sin \theta' \Rightarrow \theta = \theta' + 2\pi k$. La réciproque est immédiate. 	
Propriété	Formules d'Euler : $\forall \theta \in \mathbb{R}, \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$
Preuve	
$\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{\cos \theta + i \sin \theta + \cos(-\theta) + i \sin(-\theta)}{2} = \frac{\cos \theta + i \sin \theta + \cos \theta - i \sin \theta}{2} = \frac{2 \cos \theta}{2} = \cos \theta$ $\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{\cos \theta + i \sin \theta - \cos(-\theta) - i \sin(-\theta)}{2i} = \frac{\cos \theta + i \sin \theta - \cos \theta + i \sin \theta}{2i} = \frac{2i \sin \theta}{2i} = \sin \theta$	
Exemple	<p>Grace aux formules d'Euler et au binôme de Newton il devient possible de calculer des intégrales un peu compliquées. Le procédé qui suit qui consiste à transformer une puissance de cosinus ou de sinus en une somme de plusieurs cosinus ou sinus s'appelle la linéarisation.</p> <p>Essayons de calculer $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \, dx$. Nous ne connaissons pas de primitive à la fonction $x \rightarrow \cos^3 x$</p> <p>Nous allons donc utiliser les formules d'Euler et le binôme de Newton pour linéariser $\cos^3 x$.</p> $\begin{aligned} \cos^3 x &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^3 = \left(\frac{1}{8}\right) \sum_{k=0}^3 \binom{3}{k} (e^{ix})^k (e^{-ix})^{3-k} \\ &= \left(\frac{1}{8}\right) \sum_{k=0}^3 \binom{3}{k} (e^{ikx}) (e^{-ix(3-k)}) = \left(\frac{1}{8}\right) \sum_{k=0}^3 \binom{3}{k} (e^{ikx}) (e^{-ix(3-k)}) \\ &= \left(\frac{1}{8}\right) \sum_{k=0}^3 \binom{3}{k} (e^{ix})^{k-(3-k)} = \left(\frac{1}{8}\right) \sum_{k=0}^3 \binom{3}{k} (e^{ix})^{2k-3} \\ &= \left(\frac{1}{8}\right) \left[\binom{3}{0} (e^{-3ix}) + \binom{3}{1} (e^{-ix}) + \binom{3}{2} e^{ix} + \binom{3}{3} (e^{3ix}) \right] = \left(\frac{1}{8}\right) [e^{-3ix} + 3e^{-ix} + 3e^{ix} + e^{3ix}] \\ &= \left(\frac{1}{4}\right) \left[\frac{e^{-3ix} + 3e^{-ix} + 3e^{ix} + e^{3ix}}{2} \right] = \left(\frac{1}{4}\right) [\cos 3x + 3 \cos x] \end{aligned}$ <p>L'intégrale va maintenant être beaucoup plus simple.</p> $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{4}\right) [\cos 3x + 3 \cos x] \, dx = \left(\frac{1}{4}\right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\cos 3x] \, dx + \left(\frac{3}{4}\right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\cos x] \, dx$ $I = \frac{1}{12} [\sin 3x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left(\frac{3}{4}\right) [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{12} \sin \frac{3\pi}{2} + \frac{3}{4} \sin \frac{\pi}{2} = -\frac{1}{12} + \frac{3}{4} = -\frac{1}{12} + \frac{9}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$