

**Factorisation de polynômes**

**Définition**

Soit  $P$  un polynôme dont les coefficients sont réels. Soit  $a$  un nombre complexe.  $a$  est appelé racine de  $P$  si et seulement si  $P(a) = 0$

**Théorème**

Soit  $P$  un polynôme de degré  $n$ . Soit  $a$  une racine de  $P$ . Alors  

$$P(z) = (z - a)Q(z) \text{ avec } \deg Q \leq n - 1$$

**Preuve**

La preuve se fait en deux temps. Dans un premier temps nous allons nous intéresser à un polynôme  $P$  très particulier et nous allons démontrer ce théorème pour ce polynôme en particulier. Dans un deuxième temps nous généraliserons le théorème à tout polynôme de degré  $n$ .

**Lemme** : Soit  $P(z) = z^n - a^n$  alors  $P(z) = (z - a)Q(z)$  avec  $\deg Q \leq n - 1$

Nous remarquons au passage que  $a$  est une racine évidente de  $P$

Montrons cette propriété par récurrence sur  $n$ .

**Initialisation** : Le cas  $n = 1$  est évident.  $P(z) = (z - a) * 1$  et  $Q$  est le polynôme constant valant 1 de degré 0

**Hérédité** : Supposons la propriété vraie à l'ordre  $n$  et montrons la à l'ordre  $n + 1$

Soit  $P(z) = z^{n+1} - a^{n+1} = z * z^n - a^{n+1}$  (\*)

Or nous savons d'après l'hypothèse de récurrence que  $z^n - a^n = (z - a)Q(z)$  avec  $\deg Q \leq n - 1$

Donc  $z^n = (z - a)Q(z) + a^n$

Remplaçons  $z^n$  par cette expression dans (\*). Nous obtenons :

$$\begin{aligned} z^{n+1} - a^{n+1} &= z[(z - a)Q(z) + a^n] - a^{n+1} = (z - a) * zQ(z) + za^n - a^{n+1} = (z - a) * zQ(z) + a^n(z - a) \\ &= (z - a)[zQ(z) + a^n] \end{aligned}$$

Or  $\deg Q \leq n - 1$  donc le degré du polynôme entre crochets est donc  $\leq n$ . La propriété est donc vraie à l'ordre  $n + 1$  et le lemme est vrai pour tout  $n$ .

Plaçons-nous maintenant dans un cas général. Soit  $P$  un polynôme de degré  $n$  à coefficients réels possédant une racine  $a$ .

$$P(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n \text{ avec } a_0, a_1 \dots a_n \text{ réels.}$$

$$P(a) = a_0 + a_1a + \dots + a_na^n. \text{ Donc } P(z) - P(a) = a_1(z - a) + a_2(z^2 - a^2) + \dots + a_n(z^n - a^n)$$

Appliquons le Lemme précédent à tous les polynômes de la forme  $z^p - a^p$  avec  $1 \leq p \leq n$

Nous avons  $z^p - a^p = (z - a) Q_p(z)$  avec  $\deg Q_p \leq p - 1$

Il vient  $P(z) - P(a) = a_1(z - a) + a_2(z - a)Q_2(z) + a_3(z - a)Q_3(z) + \dots + a_n(z - a)Q_n(z)$

$$P(z) - P(a) = (z - a)[a_1 + a_2Q_2(z) + a_3Q_3(z) + \dots + a_nQ_n(z)]$$

Chaque  $Q_p$  étant de degré inférieur ou égal à  $p - 1$ , le degré du polynôme entre crochets est donc inférieur ou égal à  $n - 1$ . Il nous reste à remarquer que  $P(a) = 0$  puisque  $a$  est racine de  $P$ . Donc

$$P(z) = (z - a)Q(z) \text{ avec } \deg Q \leq n - 1$$

**Exemple**

Soit  $P(z) = z^3 - 2z + 1$ . 1 est racine évidente de  $P$ . Donc  $P(z) = (z - 1)Q(z)$  avec  $\deg Q \leq 2$

**Théorème**

Soit  $P$  un polynôme de degré  $n \geq 1$  alors  $P$  admet au plus  $n$  racines distinctes.

**Preuve**

Par récurrence sur  $n$ .

**Initialisation** : Un polynôme de degré 1 est de la forme  $P(z) = az + b$ . Il admet donc au plus 1 racine.

Remarquons qu'un polynôme de degré 2 admet aussi au maximum 2 racines.

**Hérédité** : Supposons que la propriété soit vraie au rang  $n$  : Un polynôme de degré  $n$  admet au plus  $n$  racines.

Montrons que la propriété est vraie à l'ordre  $n + 1$

Soit  $Q$  un polynôme de degré  $n + 1$ . Si  $Q$  n'admet pas de racines alors la propriété est vérifiée pour  $n + 1$

Si  $Q$  admet une racine, appelons la  $a$ . Alors le théorème précédent nous dit que  $Q(z) = (z - a)P(z)$

Avec  $\deg P \leq n$ . Appliquons l'hypothèse de récurrence à  $P$ .  $P$  admet au plus  $n$  racines.

Vu la décomposition de  $Q$ , les racines de  $Q$  sont soit des racines de  $P$  soit égales à  $a$ .

$Q$  admet donc au plus  $n + 1$  racines. La propriété est vérifiée au rang  $n + 1$ . Elle est donc vraie quelque soit  $n$ .

**Exemple**

Soit  $P(z) = z^3 - 2z + 1$ .  $P$  admet au plus 3 racines.

<b>Théorème</b>	Soit $P$ un polynôme de degré $n$ . Le nombre de solutions de l'équation $P(z) = a$ est inférieur ou égal à $n$ .
<b>Preuve</b>	
Soit $Q$ le polynôme défini par $Q(z) = P(z) - a$ . Le nombre de solutions de l'équation $P(z) = a$ est égal au nombre de racines de l'équation $Q(z) = a$ . $\deg Q = \deg P$ . Ce nombre de solutions est donc inférieur ou égal à $n$ .	