Arithmétique. Cours

Théorème de Gauss	
Théorème	Soient a, b et c trois entiers relatifs non nuls. **Si $\boldsymbol{a \mid bc}$ et $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ sont premiers entre eux alors $\boldsymbol{a \mid c}$**
Preuve	
a et b sont premiers entre eux donc d'après le théorème de Bezout, il existe u et v tels que : $au + bv = 1$ Multiplions cette égalité par c : $acu + bcv = c$. Or $a \mid bc$ donc $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $bc = ka$ L'égalité devient : $acu + kav = c \Rightarrow a(cu + kv) = c \Rightarrow a\|c$	
Exemple	$21 \mid 1008$ en effet $1008 = 21 * 48$ $1008 = 16 * 63$. 21 et 16 sont premiers entre eux. Donc $21 \mid 63$
Propriété	Cette propriété est un corrollaire du théorème de Gauss. Soient a et b deux entiers relatifs premiers entre eux. **Soit $\boldsymbol{c}$ un entier relatif tel que $\boldsymbol{a \mid c}$ et $\boldsymbol{b \mid c}$ alors $\boldsymbol{ab \mid c}$**
Preuve	
a et b sont premiers entre eux donc il existe u et v tels que : $au + bv = 1\ (*)$ $a \mid c$ et $b \mid c$ donc il existe k et k' tels que $c = ka$ et $c = k'b$ Multiplions $(*)$ par c. Il vient $acu + bcv = c \Rightarrow k'bau + kabv = c \Rightarrow c = ab(k'u + kv)$ donc $ab \mid c$	