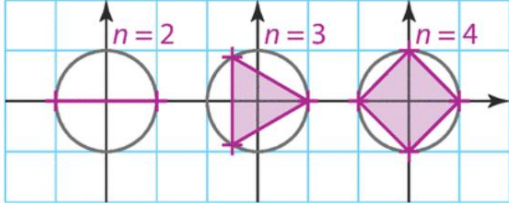
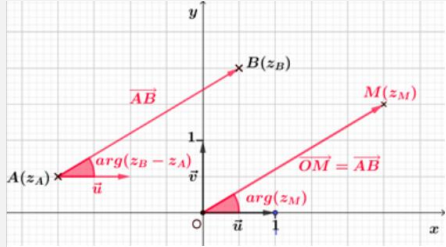
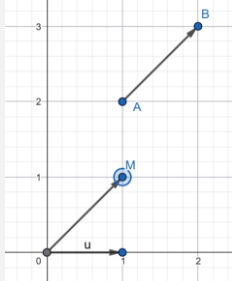


Nombres complexes . Cours

Racines n-ièmes	
Définition	On note \mathbb{U} l'ensemble des nombres complexes de module 1.
Exemples	$1, e^{\frac{i\pi}{3}}$ et i sont des éléments de \mathbb{U}
Propriété	Soient z et z' deux complexes de \mathbb{U} . Alors $zz' \in \mathbb{U}$ et $\frac{1}{z} \in \mathbb{U}$
Preuve	
Si $ z = 1$ et $ z' = 1$ alors $ zz' = z z' = 1$. De même $\left \frac{1}{z}\right = \frac{ 1 }{ z } = 1$	
Définition	Soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle racine n -ième de l'unité un nombre complexe z tel que $z^n = 1$ On note \mathbb{U}_n l'ensemble des racines n -ièmes de l'unité.
Propriété	$\mathbb{U}_n = \left\{1, e^{\frac{2i\pi}{n}}, e^{\frac{4i\pi}{n}}, \dots, e^{\frac{2i\pi k}{n}}, \dots, e^{\frac{2i\pi(n-1)}{n}}\right\}$. Autrement dit $z \in \mathbb{U}_n \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}, tq z = e^{\frac{2i\pi k}{n}}$ avec $0 \leq k \leq n-1$
Preuve	
Posons $z = re^{i\theta}$. Remarquons que l'équation polynomiale $z^n = 1$ est de degré n . Elle admet donc au plus n solutions.	
$z^n = 1 \Leftrightarrow r^n e^{in\theta} = 1e^{i0} \Leftrightarrow \begin{cases} r^n = 1 \\ et \\ n\theta = 0 [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 1 \\ et \\ n\theta = 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 1 \\ et \\ \theta = \frac{2k\pi}{n} \end{cases} \Leftrightarrow z = e^{\frac{2i\pi k}{n}} \text{ avec } 0 \leq k \leq n-1$	
Exemple	<ul style="list-style-type: none"> • $\mathbb{U}_2 = \{1, -1\}$ ensemble des solutions de $z^2 = 1$. • $\mathbb{U}_3 = \left\{1, e^{\frac{2i\pi}{3}}, e^{\frac{4i\pi}{3}}\right\}$ ensemble des solutions de $z^3 = 1$ aussi. On note aussi $e^{\frac{2i\pi}{3}} = j, e^{\frac{4i\pi}{3}} = j^2$ • $\mathbb{U}_4 = \{1, i, -i, -1\}$ ensemble des solutions de $z^4 = 1$ •
Remarque	<p>Les racines n-ièmes de l'unité sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés, inscrit dans le cercle trigonométrique.</p> 

Argument et géométrie	
Propriété	Soient $A(z_A)$ et $B(z_B)$ deux points du plan complexe dans un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) $(\vec{u}, \overline{AB}) = \arg(z_B - z_A) [2\pi]$
Preuve	
<p>Soit un point M du plan tel que $\overline{AB} = \overline{OM}$ (*).</p> <p>Nous savons que $(\vec{u}, \overline{OM}) = \arg[z_M] [2\pi]$. z_M étant l'affixe du point M</p> <p>Or la relation (*) transcrite au niveau des affixes nous donne $z_M - 0 = z_B - z_A$ $z_M = z_B - z_A$</p> <p>Nous avons bien $(\vec{u}, \overline{AB}) = (\vec{u}, \overline{OM}) = \arg(z_B - z_A) [2\pi]$</p>	
Exemple	<p>Soient les points $A(1 + 2i), B(2 + 3i)$</p> $z_B - z_A = 2 + 3i - (1 + 2i) = 1 + i$ <p>Donc</p> $(\vec{u}, \overline{AB}) = \arg(z_B - z_A) [2\pi] = \arg(1 + i)$ $= \arg(\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}) = \frac{\pi}{4} [2\pi]$ 

Propriété	Soient $A(z_A), B(z_B), C(z_C), D(z_D)$ quatre points du plan complexe avec $B \neq A$ et $D \neq C$. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \arg \left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \right) [2\pi]$		
Preuve			
$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{AB}, \vec{u}) + (\vec{u}, \overrightarrow{CD}) [2\pi] = -(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) + (\vec{u}, \overrightarrow{CD}) [2\pi] = -\arg(z_B - z_A) + \arg(z_D - z_C) [2\pi] = \arg \left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \right) [2\pi]$			
Remarque	En posant $C = A$ dans la formule précédente il vient : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \arg \left(\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} \right) [2\pi]$ Puis en posant $D = C$ nous avons : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \arg \left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right) [2\pi]$		
Propriétés	Soient A, B, C, D quatre points du plan		
	1. A, B et C alignés ssi $\arg \left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right) = 0[\pi]$	2. $(AB) // (CD)$ ssi $\arg \left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \right) = 0[\pi]$	3. $(AB) \perp (CD)$ ssi $\arg \left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \right) = \frac{\pi}{2} [\pi]$
Preuve			
1. Les points A, B et C sont alignés ssi $\left\{ \begin{array}{l} (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0[2\pi] \\ \text{ou} \\ (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \pi[2\pi] \end{array} \right\} \Leftrightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0[\pi] \Leftrightarrow \arg \left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right) = 0[\pi]$			
2. $(AB) // (CD)$ ssi $\left\{ \begin{array}{l} (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 0[2\pi] \\ \text{ou} \\ (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \pi[2\pi] \end{array} \right\} \Leftrightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 0[\pi] \Leftrightarrow \arg \left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \right) = 0[\pi]$			
3. $(AB) \perp (CD)$ ssi $\left\{ \begin{array}{l} (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \frac{\pi}{2}[2\pi] \\ \text{ou} \\ (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = -\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{array} \right\} \Leftrightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \frac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow \arg \left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \right) = \frac{\pi}{2}[\pi]$			