

Graphes associés à des chaînes de Markov

Définition

Un graphe probabiliste est un graphe orienté et pondéré tel que, pour chaque sommet la somme des poids des arcs issus de ce sommet vaut 1.

Définition

On considère une chaîne de Markov homogène $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'espace d'états $E = \{e_i \text{ avec } 1 \leq i \leq N\}$
 Nous avons vu que la matrice de transition de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $((Q(i, j))_{\substack{1 \leq i \leq N, \\ 1 \leq j \leq N}}$, est une matrice stochastique. On peut donc associer à cette chaîne un graphe probabiliste dont les sommets seront les e_i avec $1 \leq i \leq N$, l'arc $\overrightarrow{e_i e_j}$ étant affecté du poids $Q(i, j)$

Exemples

Exemple 1 : On dispose de deux urnes A et B . L'urne A contient au départ 2 boules.

A chaque étape on choisit une boule au hasard et on la change d'urne.

On note X_n le nombre de boules présentes à l'instant n dans l'urne A

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien une chaîne de Markov car le nombre de boules dans l'urne A , à l'instant $n + 1$ ne dépend que du nombre de boules dans l'urne A à l'instant n .

L'espace d'Etats de cette chaîne est $E = \{0 ; 1 ; 2\}$

Si à l'instant n , l'urne A contient 0 boules, alors à l'instant $n + 1$ elle en contiendra 1.

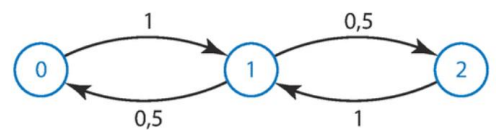
Si à l'instant n , l'urne A contient 1 boule, alors à l'instant $n + 1$ elle en contiendra $\begin{cases} 0 \text{ avec une probabilité de } \frac{1}{2} \\ \text{ou} \\ 2 \text{ avec une probabilité de } \frac{1}{2} \end{cases}$

Si à l'instant n , l'urne A contient 2 boules, alors à l'instant $n + 1$ elle en contiendra 1.

Nous avons donc la matrice de transition Q suivante.

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Que nous pouvons associer au graphe suivant :



Exemple 2 : Soit le graphe probabiliste ci-contre. Nous allons voir cette fois qu'il définit une chaîne de Markov et nous allons en déduire sa matrice de transition.

Soit X_n la variable aléatoire correspondant au sommet du graphe à l'instant n .

$$P_{X_n=A}(X_{n+1} = A) = 0,3; P_{X_n=B}(X_{n+1} = A) = 0,5;$$

$$P_{X_n=B}(X_{n+1} = B) = 0,5; P_{X_n=A}(X_{n+1} = B) = 0,7$$

Ce qui nous donne la matrice de transition Q suivante :

$$Q = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$$

