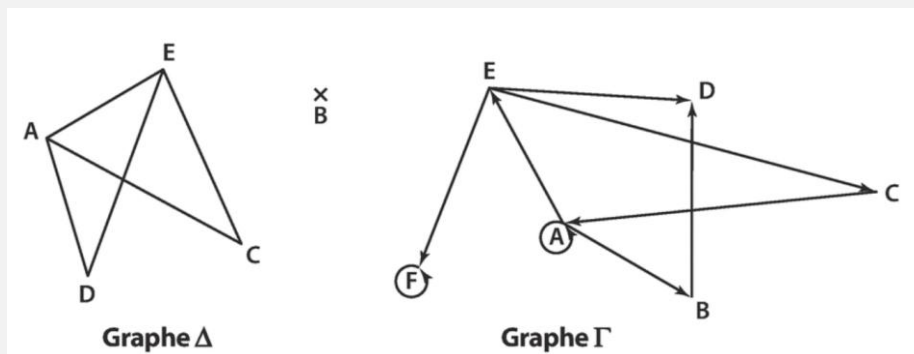


Introduction aux graphes

Définitions

- Un **graphe non orienté** d'ordre  $n$  est un ensemble de  $n$  points : les **sommets**, reliés entre eux (ou non) par des lignes : les **arêtes**.
- Un **graphe orienté** d'ordre  $n$  est un ensemble de  $n$  points : les **sommets**, reliés entre eux (ou non) par des flèches : les **arcs**. Un sommet peut être relié à lui-même par une boucle.
- Un sommet est **adjacent** à un autre s'il est relié à cet autre sommet par un arc ou une arête.
- Un sommet adjacent à aucun autre est dit **isolé**.
- Le **degré** d'un sommet est son nombre d'arêtes ou d'arcs (les boucles comptant deux fois)
- Un **graphe complet** est un graphe dans lequel tous les sommets sont adjacents entre eux.



Exemples

① Le graphe  $\Delta$  est un graphe non orienté d'ordre 5 avec les degrés suivants.

| Sommet | A | B | C | D | E |
|--------|---|---|---|---|---|
| Degré  | 3 | 0 | 2 | 2 | 3 |

B est un sommet isolé.

A-D-E-A-C est une chaîne de longueur 4 reliant A à C.

A-D-E-C-A est une chaîne fermée de longueur 4, c'est même un cycle de longueur 4.

② Le graphe  $\Gamma$  est un graphe orienté d'ordre 6 avec les degrés suivants.

| Sommet | A | B | C | D | E | F |
|--------|---|---|---|---|---|---|
| Degré  | 5 | 2 | 2 | 2 | 4 | 3 |

A et F possèdent une boucle, comptée deux fois dans leur degré.

A-E-D est un chemin de longueur 2 reliant A à D.

E-C-A-A-E est un circuit de longueur 4.

E-C-A-E est un circuit de longueur 3.

Définitions

- Dans un graphe non orienté (*resp. orienté*), une **chaîne** (*resp. un chemin*) de longueur  $n$  est une succession de  $n$  arêtes (*resp. arcs*) telles que l'extrémité de chacune est l'origine de la suivante (*sauf pour la dernière arête*)
- Si l'origine de la première arête et l'extrémité de la dernière coïncident, on dit que la chaîne (*resp. le chemin*) est **fermé(e)**
- Si la chaîne (*resp. chemin*) fermé(e) est composé(e) d'arêtes (*resp. arcs*) toutes distinctes, on parle alors de **cycle** (*resp. circuit*).

Proposition

Dans un graphe, la somme des degrés de chaque sommet est égale au double du nombre d'arêtes.

Preuve

Lorsque l'on additionne les degrés des sommets on compte deux fois les arêtes (une fois sur le sommet de destination, une fois sur le sommet d'origine). La somme des degrés est donc égale au double du nombre d'arêtes.

Remarque

Nous en déduisons que la somme des degrés est toujours paire.