Matrices. Cours

Inverse de matrices

Propriété	Soit A une matrice quelconque de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ Soit B une matrice quelconque de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ Il existe une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ que nous noterons I_n telle que $\boldsymbol{AI_n = A}$ Cette matrice vérifie aussi $\boldsymbol{BI_n = B}$ I_n est une matrice carré de taille n dont les coefficients sont égaux à 1 sur la diagonale principale et 0 sinon.
Exemple	Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$. $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $$AI_2 = \begin{pmatrix} -1*1+(-3)*0 & -1*0+(-3)*1 \\ 2*1+4*0 & 2*0+4*1 \\ 3*1+5*0 & 3*0+5*1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = A$$ $$I_2B = \begin{pmatrix} 1*(-1)+0*(-4) & 1*2+0*5 & 1*3+0*6 \\ 0*(-1)+1*(-4) & 0*2+1*5 & 0*3+1*6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = B$$ Bien entendu $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ……
Définition	Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite inversible lorsqu'il existe une autre matrice racine B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AB = BA = I_n$. Cette matrice B qui est unique est appelée l'inverse de A et est notée A^{-1}
Exemple	Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ alors $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. En effet $AA^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Et $A^{-1}A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Nous en déduisons que $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Preuve de l'unicité de l'inverse

Soit A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Supposons qu'il existe deux matrices B et C de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$AB = BA = AC = CA = I_n$$

Nous avons $B = BI_n = BAB = BAC = C$. L'inverse d'une matrice est donc unique.

Définition	Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On appelle déterminant de A et on note $\det(A)$ le nombre $ad - bc$. $$\det(A) = ad - bc$$
Propriété	Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. A est inversible ssi $\det(A) \neq 0$ On a alors $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Preuve	
Dans le cas où $\det(A) \neq 0$ il n'est pas difficile en posant $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ de vérifier que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_2$ Par contre dans le cas où $ad = bc,$ trouver une matrice $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ telle que $AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = I_2$ Revient à résoudre le système $\begin{cases} ax + bz = 1\ (1) & ay + bt = 0(3) \\ cx + dz = 0(2) & cy + dt = 1(4) \end{cases}$ Multiplions (2) par a il vient $acx + adz = 0 \Rightarrow acx + bcz = 0 \Rightarrow c(ax + bz) = 0 \;\Rightarrow\; c = 0\ ou\ ax + bz = 0$ Nous savons que $ax + bz = 1$ donc $c = 0$. Le système devient $\begin{cases} ax + bz = 1\ (1) & ay + bt = 0(3) \\ dz = 0(2) & dt = 1(4) \end{cases}$ $dt = 1$ nous renseigne sur le fait que ni d ni t sont nuls. Par contre $dz = 0 \Rightarrow z = 0$ Le système devient $\begin{cases} ax = 1\ (1) & ay + bt = 0(3) \\ dz = 0(2) & dt = 1(4) \end{cases}$ $ad = bc = 0$ nous dit que $a = 0$ ou $d = 0$ mais (1) nous dit que a est non nul et (4) nous dit que d est non nul. Nous sommes donc arrivés à une contradiction. Il est impossible de trouver B telle que $AB = BA = I_2$	
Exemple	Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Nous remarquons que $\det(A) = 1 * 1 - 1 * (-1) = 2$ Donc A est inversible. Son inverse $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
Définition	Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors $A^n = A * A * \ldots A\ (n\ fois)$