

Markov. Cours

Matrices de transition	
Définition	On considère une chaîne de Markov $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'espace d'états $E = \{e_i \text{ avec } 1 \leq i \leq N\}$ On dit que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est homogène si $\forall n \in \mathbb{N}, \forall (i, j)$ avec $1 \leq i, j \leq N$, $P_{X_n=e_i}(X_{n+1} = e_j)$ est indépendante de n
Définition	Dans le cas d'une chaîne de Markov homogène, le nombre $P_{X_n=e_i}(X_{n+1} = e_j)$ que l'on note $Q(i, j)$ est appelé probabilité de transition de la chaîne homogène $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ La matrice de transition $Q = ((Q(i, j)))_{\substack{1 \leq i \leq N \\ 1 \leq j \leq N}}$ est appelée matrice de transition de la chaîne de Markov.
Exemples	Une puce se déplace sur les sommets d'un triangle équilatéral. Elle passe d'un sommet à l'autre en sautant. Les sommets sont numérotés 1, 2 et 3. Soit X_n la position de la puce après n saut. $P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{2}; P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 3) = \frac{1}{2};$ $P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{2}; P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 3) = \frac{1}{2};$ $P_{(X_n=3)}(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{2}; P_{(X_n=3)}(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{2};$ La suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov homogène dont la matrice de transition est : $Q = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$
Définition	On appelle matrice stochastique d'ordre n toute matrice carré de taille n dont la somme des coefficients de chaque ligne est égale à 1
Exemple	La matrice de transition utilisée dans le précédent exemple est une matrice stochastique.
Propriété	La matrice de transition d'une chaîne de Markov est une matrice stochastique .
Preuve	Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov. Soit $Q = ((Q(i, j)))_{\substack{1 \leq i \leq N \\ 1 \leq j \leq N}}$ sa matrice de transition. La somme des coefficients de la ligne i est $\sum_{k=1}^n Q(i, k)$ $\sum_{k=1}^n Q(i, k) = \sum_{k=1}^n P_{X_n=e_i}(X_{n+1} = e_k) = \sum_{k=1}^n \frac{P(X_{n+1} = e_k \cap X_n = e_i)}{P(X_n = e_i)}$ $= \frac{1}{P(X_n = e_i)} \sum_{k=1}^n P(X_{n+1} = e_k \cap X_n = e_i) = \frac{1}{P(X_n = e_i)} * P(X_n = e_i) = 1$
Définition	On appelle distribution initiale d'une chaîne de Markov $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la loi de la variable X_0 . C'est-à-dire la matrice ligne notée π_0 : $\pi_0 = (P(X_0 = e_1) \quad P(X_0 = e_2) \quad \dots \quad P(X_0 = e_N))$