

Matrices d'adjacence

| | | |
|--|---|---|
| <p>Définitions</p> | <p>Soit G un graphe (orienté ou non) d'ordre p de sommets s_1, s_2, \dots, s_p Il est possible d'associer à G une matrice M carré de taille p composée de coefficients $((m_{i,j}))_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq p}}$ Tels que $m_{i,j}$ est le nombre d'arêtes ou d'arcs reliant le sommet s_i avec le sommet s_j. Cette matrice est appelée matrice d'adjacence associée à G.</p> | |
| <p>Exemple</p> | | <p>En appelant s_1, s_2, \dots, s_6 sommets A, B, C, D, E, F Nous obtenons la matrice d'adjacence :</p> $M = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C & D & E & F \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$ |
| <p>Théorème</p> | <p>Nombre de chemins de longueur n :</p> <ul style="list-style-type: none"> • Soit G un graphe orienté d'ordre p dont les sommets sont s_1, s_2, \dots, s_p. • Soit M sa matrice d'adjacence de taille p. $M = ((m_{i,j}))_{1 \leq i \leq p}$ • Notons $M^n = ((m_{i,j}^{(n)}))_{1 \leq i \leq p}$ <p>Alors $m_{i,j}^{(n)}$ représente le nombre de chemins de longueur n entre s_i et s_j</p> | |
| <p>Preuve</p> | | |
| <p>Par récurrence sur n la longueur du chemin. Soit $P(n)$ l'hypothèse de récurrence : $m_{i,j}^{(n)}$ représente le nombre de chemins de longueur n entre s_i et s_j</p> <p>Initialisation : $n = 1$ M est la matrice d'adjacence de G donc $m_{i,j}^{(1)}$ soit $m_{i,j}$ représente le nombre de chemins de longueur 1 entre s_i et s_j.</p> <p>Hérédité : Supposons que $m_{i,j}^{(n)}$ représente le nombre de chemins de longueur n entre s_i et s_j</p> $M^{n+1} = M^n * M$ <p>Donc $m_{i,j}^{(n+1)} = m_{i,1}^{(n)}m_{1,j} + m_{i,2}^{(n)}m_{2,j} + \dots + m_{i,p}^{(n)}m_{p,j}$ (*)</p> <p>Or le nombre de chemin de longueur $n + 1$ entre s_i et s_j est égal :</p> <ul style="list-style-type: none"> • au nombre de chemins de longueur n entre s_i et s_1 multiplié par le nombre de chemins de longueur 1 entre s_1 et s_j auquel il faut rajouter : • le nombre de chemins de longueur n entre s_i et s_2 multiplié par le nombre de chemins de longueur 1 entre s_2 et s_j auquel il faut rajouter le : • ... • le nombre de chemins de longueur n entre s_i et s_p multiplié par le nombre de chemins de longueur 1 entre s_p et s_j. <p>Ce calcul est exactement l'expression écrite en (*), On en déduit que le nombre de chemins de longueur $n + 1$ entre s_i et s_j est bien $m_{i,j}^{(n+1)}$</p> <p>Conclusion : L'hypothèse de récurrence est vérifiée quelque soit n. Nous avons donc : $m_{i,j}^{(n)}$ représente le nombre de chemins de longueur n entre s_i et s_j quelque soit n.</p> | | |

Reprenons la matrice d'adjacence :

$$M = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C & D & E & F \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Exemple

$$M^5 = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C & D & E & F \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{matrix} & \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}, \text{ il y a donc, par exemple, 3 chemins de longueur 5 reliant C à F.}$$