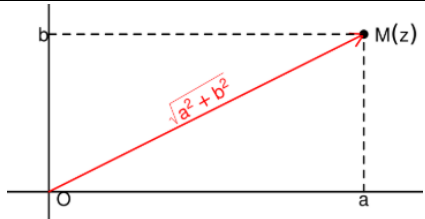


Nombres complexes . Cours

| Module d'un nombre complexe | |
|--|--|
| Définition | Soit M un point du plan d'affixe z dans le plan complexe. On appelle module de z et on note $ z $ la distance OM , O étant l'origine du repère. |
| Propriété | <div style="display: flex; align-items: center;"> <div style="flex: 1;"> <p>Soit M un point d'affixe $z = a + ib$ avec a et b réels.</p> $z = \sqrt{a^2 + b^2}$ </div> <div style="flex: 1; text-align: center;">  </div> </div> |
| Preuve | |
| Soit $M(x, y)$ d'affixe $z = x + iy$. $ z = OM = \ \overrightarrow{OM}\ $. $\overrightarrow{OM}(x, y)$ donc $ z = \ \overrightarrow{OM}\ = \sqrt{x^2 + y^2}$ | |
| Exemple | Soit $z = 2 - 3i$. $ z = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$ |
| Remarque | <ul style="list-style-type: none"> • Dans le cas où z est réel. $z = a$ ($a \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow z = a$ • Dans le cas où z est imaginaire pur, $z = ia$ ($a \in \mathbb{R}$) $z = a$ • $z = z' \Rightarrow z = z'$. Par contre la réciproque est fautive. En effet $1 + i = 1 - i = \sqrt{1^2 + (\pm 1)^2} = \sqrt{2}$ mais $1 + i \neq 1 - i$ |
| Propriétés | Soit $z = a + ib$ un nombre complexe. . 1. $ z = 0 \Rightarrow z = 0$ 2. $ -z = z $ 3. $ \bar{z} = z $ 4. $z * \bar{z} = z ^2$ |
| Preuve | |
| 1. $ z = 0 \Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = 0 \Rightarrow a = b = 0$ 2. $ -z = \sqrt{(-a)^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = z $ 3. $ \bar{z} = a - ib = \sqrt{(a)^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = z $ 4. $z * \bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = (\sqrt{a^2 + b^2})^2 = z ^2$ | |
| Propriétés | Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes. |
| | <div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <div style="width: 25%;">1. $zz' = z z'$</div> <div style="width: 25%;">2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $z^n = z ^n$</div> <div style="width: 25%;">3. Si $z \neq 0$, $\left \frac{1}{z}\right = \frac{1}{ z }$ Du coup $\left \frac{z'}{z}\right = \frac{ z' }{ z }$</div> <div style="width: 25%;">4. $z + z' \leq z + z'$</div> </div> |
| Preuve | 1. $ zz' = (a + ib)(a' + ib') = aa' - bb' + i(ba' + ab') = \sqrt{(aa' - bb')^2 + (ba' + ab')^2} = \sqrt{(aa')^2 + (bb')^2 + (ba')^2 + (ab')^2}$ $ z z' = \sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{a'^2 + b'^2} = \sqrt{(a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2)} = \sqrt{(aa')^2 + (bb')^2 + (ba')^2 + (ab')^2} = zz' $ 2. Par récurrence. Pour $n = 1$, c'est évident. Supposons $ z^n = z ^n$ $ z^{n+1} = z * z^n = z * z ^n = z ^{n+1}$ C'est donc vrai aussi à l'ordre $n + 1$, conclusion c'est vrai pour tout n 3. $\left \frac{z}{z}\right = z * \left \frac{1}{z}\right \Rightarrow \left \frac{1}{z}\right = \frac{1}{ z }$. Du coup $\left \frac{z'}{z}\right = \left z' * \frac{1}{z}\right = z' * \left \frac{1}{z}\right = \frac{ z' }{ z }$ 4. $ z + z' ^2 = (\sqrt{(a + a')^2 + (b + b')^2})^2 = (a + a')^2 + (b + b')^2 = a^2 + b^2 + a'^2 + b'^2 + 2aa' + 2bb'$ $(z + z')^2 = (\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a'^2 + b'^2})^2 = a^2 + b^2 + a'^2 + b'^2 + 2\sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{a'^2 + b'^2}$ $ z + z' ^2 - (z + z')^2 = 2aa' + 2bb' - 2\sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{a'^2 + b'^2}$ En posant $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$ il vient : $ z + z' ^2 - (z + z')^2 = 2(\vec{u} \cdot \vec{v} - \ \vec{u}\ \ \vec{v}\)$ Or nous savons que $ \vec{u} \cdot \vec{v} \leq \ \vec{u}\ \ \vec{v}\ $ donc $ z + z' ^2 - (z + z')^2 \leq 0 \Rightarrow$ $ z + z' \leq (z + z')^2$ La fonction carré étant croissante sur \mathbb{R}^+ nous avons $ z + z' \leq z + z' $ |

| | |
|--|---|
| Propriété | Soient A et B deux points du plan complexe d'affixe z_A et z_B alors $AB = z_B - z_A $ |
| Preuve | |
| Posons $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ alors $z_A = x_A + iy_A$ et $z_B = x_B + iy_B$ $ z_B - z_A = (x_B - x_A) + i(y_B - y_A) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = AB$ | |
| Exemple | Soient $A(-1 + 2i)$ et $B(1 - i)$ $AB = 1 - i - (-1 + 2i) = 2 - 3i = \sqrt{2^2 + (3)^2} = \sqrt{13}$ |