

## Nombres complexes. Cours

Opérations dans $\mathbb{C}$	
<b>Propriétés</b>	On munit $\mathbb{C}$ d'une addition et d'une multiplication définies ainsi : Soient $z = a + ib$ et $z' = c + id$ .
	$z + z' = (a + c) + i(c + d)$
	$zz' = (a + ib)(c + id)$ $zz' = ac - bd + i(bc + ad)$
Ces deux opérations possèdent les mêmes propriétés que l'addition et la multiplication dans $\mathbb{R}$	
Preuve	
$z + z' = (a + ib) + (c + id) = a + ib + c + id = a + c + ib + id$ $= a + c + i(b + d)$	$zz' = (a + ib)(c + id) = ac + iad + ibc + bdi^2$ $= ac - bd + i(bc + ad)$
<b>Exemple</b>	Posons $z = 3 + 4i$ et $z' = -2 + 2i$ $z + z' = 3 + 4i + (-2) + 2i = 1 + 6i$ $zz' = (3 + 4i)(-2 + 2i) = -6 + 6i - 8i - 8 = -14 - 2i$
<b>Définition</b>	L'opposé d'un nombre complexe $z$ noté $-z$ est le nombre complexe tel que $\begin{cases} \Re(-z) = -\Re(z) \\ \Im(-z) = -\Im(z) \end{cases}$ En résumé si $z = a + ib$ alors $-z = -a - ib$
<b>Exemple</b>	Si $z = -2 + 2i$ alors $-z = 2 - 2i$
<b>Définition et propriété</b>	Soit $z$ un nombre complexe non nul. $z = a + ib$ Alors il existe un complexe $z'$ tel que $zz' = 1$
Preuve	
Le complexe $z' = \frac{1}{a^2+b^2}a - i\frac{1}{a^2+b^2}b$ convient très bien. En effet $zz' = (a + ib)\left(\frac{1}{a^2+b^2}a - i\frac{1}{a^2+b^2}b\right) = \frac{1}{a^2+b^2}(a^2 + b^2 + i(ab - ba)) = 1$	
<b>Méthode</b>	Pour trouver l'inverse d'un nombre complexe on utilise la méthode de l'expression conjuguée : $\frac{1}{a + ib} = \frac{(a - ib)}{(a + ib)(a - ib)} = \frac{(a - ib)}{(a^2 - (ib)^2)} = \frac{(a - ib)}{a^2 + b^2}$
<b>Exemple</b>	Si $z = 3 + 4i$ alors $\frac{1}{z} = \frac{1}{3+4i} = \frac{3-4i}{3^2+4^2} = \frac{3-4i}{25} = \frac{1}{25}(3 - 4i)$
<b>Définition</b>	Diviser par un nombre complexe c'est multiplier par son inverse. $\frac{z}{z'} = z * \left(\frac{1}{z'}\right)$
<b>Exemple</b>	Soit $z = -2 + 2i$ et $z' = 3 + 4i$ Alors $\frac{z}{z'} = \frac{-2+2i}{3+4i} = (-2 + 2i) * \left(\frac{1}{3+4i}\right) = (-2 + 2i) * \frac{1}{25}(3 - 4i) = \frac{1}{25}(-6 + 8i + 6i + 8) = \frac{1}{25}(2 + 14i)$