Arithmétique. Cours

PGCD	
Définition	Soient a et b deux entiers relatifs. On appelle plus grand diviseur commun à a et b que l'on note $\boldsymbol{PGCD(a,b)}$ le plus grand diviseur commun à a et b.
Preuve	
Nous allons ici démontrer l'existence de ce $PGCD$. L'ensemble des diviseurs communs à a et b est un ensemble fini car c'est l'intersection de deux ensembles finis. 1 appartient à cet ensemble car 1 divise a et b L'ensemble des diviseurs communs à a et b est donc un ensemble fini et non vide. Toute sous partie finie et non vide de $\mathbb{Z}$ admet un plus grand élément. Le plus grand élément de cet ensemble est le $PGCD$ que nous cherchons.	
Exemple	Les diviseurs de 18 sont $1, 2, 3, 6, 9$ et 18 Les diviseurs de 24 sont $1, 2, 4, 6, 8,12$ et 24 Les diviseurs communs à 12 et 18 sont $1, 2$ et 6 Donc $\boldsymbol{PGCD(12,18)=6}$
Notation	Pour tout a, b entiers relatifs : $b \mid a$ se lit b $divise$ a
Propriétés	Pour tout a, b entiers relatifs : • $PGCD(a,b)=PGCD(b,a)$ • $PGCD(a,b)=PGCD(\lvert a\rvert,\lvert b\rvert)$ • $PGCD(a,0)=a$ • $b \mid a \Rightarrow PGCD(a,b)=b$ • $\forall k \in \mathbb{N}^*, PGCD(ka,kb)=kPGCD(a,b)$
Preuve	
Les preuves sont évidentes, il suffit de les écrire.	
Exemple	• $PGCD(18{,}24)=PGCD(24{,}18)$ • $PGCD(-18,-24)=PGCD(18,-24)=PGCD(-18{,}24)=PGCD(18{,}24)$ • $PGCD(18{,}0)=18$ • $PGCD(12{,}24)=12$ car $12\mid 24$ • $PGCD(12{,}18)=2*PGCD(6{,}9)=2*3*PGCD(3{,}1)=2*3*1=6$
Définition	Deux nombres sont dits premiers entre eux si leur $PGCD$ vaut 1. Cela signifie que leur seul diviseur commun est 1.
Exemple	25 et 24 sont premiers entre eux car $PGCD(25{,}24)=1$
Remarque	• Deux nombres premiers entre eux ne sont pas nécessairement premiers. Dans l'exemple précédent 25 et 24 ne sont pas premiers. Par contre il n'ont pas d'autre diviseur commun que 1 • Une fraction est dite irréductible lorsque son numérateur et son dénominateur ont un $PGCD$ égal à 1. $\frac{25}{24}$ par exemple est irréductible.