

Propriétés produit scalaire

Propriété produit scalaire		
Propriété	Bilinéarité	Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et pour tout réel k . $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$ $\vec{u}.(k\vec{v}) = k\vec{u}.\vec{v}$
Propriété	Utilisation des normes	- Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. On a $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\ \vec{u}\ ^2 + \ \vec{v}\ ^2 - \ \vec{u} - \vec{v}\ ^2)$ $\ \vec{u} + \vec{v}\ ^2 = \ \vec{u}\ ^2 + \ \vec{v}\ ^2 + 2\vec{u}.\vec{v}$ $\ \vec{u} - \vec{v}\ ^2 = -2\vec{u}.\vec{v} + \ \vec{u}\ ^2 + \ \vec{v}\ ^2$
Démonstration		
$\ \vec{u} + \vec{v}\ ^2 = (\vec{u} + \vec{v}).(\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u}.\vec{u} + \vec{u}.\vec{v} + \vec{v}.\vec{u} + \vec{v}.\vec{v} = \ \vec{u}\ ^2 + \ \vec{v}\ ^2 + 2\vec{u}.\vec{v}$ $\ \vec{u} - \vec{v}\ ^2 = (\vec{u} - \vec{v}).(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}.\vec{u} - \vec{u}.\vec{v} - \vec{v}.\vec{u} + \vec{v}.\vec{v} = \ \vec{u}\ ^2 + \ \vec{v}\ ^2 - 2\vec{u}.\vec{v} \rightarrow$ $2\vec{u}.\vec{v} = \ \vec{u}\ ^2 + \ \vec{v}\ ^2 - \ \vec{u} - \vec{v}\ ^2 \rightarrow \vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\ \vec{u}\ ^2 + \ \vec{v}\ ^2 - \ \vec{u} - \vec{v}\ ^2)$		
Propriété	Dans un repère orthonormé, si $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ alors $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$	
Démonstration		
Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ce repère orthonormé. $\vec{u}.\vec{v} = (x\vec{i} + y\vec{j}).(x'\vec{i} + y'\vec{j}) = xx'\vec{i}.\vec{i} + xy'\vec{i}.\vec{j} + yx'\vec{j}.\vec{i} + yy'\vec{j}.\vec{j}$ Le repère est orthonormé, cela signifie que $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonaux (et donc $\vec{i}.\vec{j} = \vec{j}.\vec{i} = 0$) et $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ont tous les deux une norme égale à 1. $\vec{i}.\vec{i} = \vec{j}.\vec{j} = \ \vec{i}\ ^2 = \ \vec{j}\ ^2 = 1$. Il vient $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$		
Propriété	Dans un repère orthonormé, deux vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$ ce qui se traduit par $xx' + yy' = 0$	
Exemple	On considère les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix}$. Leur produit scalaire vaut : $\vec{u}.\vec{v} = 2 * (-3) + 3 * (-5) = -6 - 15 = -21 \neq 0$ donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas orthogonaux.	