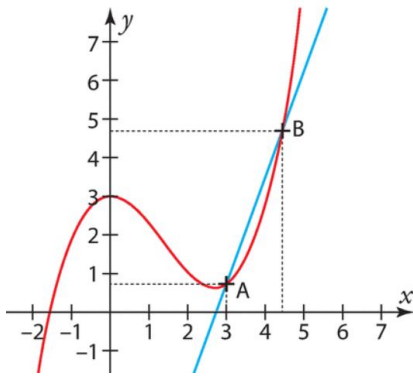


Tangente à une courbe, nombre dérivé

Contexte : Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère O, I, J . a et b désignent des réels de l'intervalle I . A et B sont des points de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisse $x_A = a$ et $x_B = b$.

Taux de variation

Définition	Taux de variation	Le taux de variation de la fonction f entre a et b ($a \neq b$) est le quotient $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ Lorsque $b = a + h$ ($h \neq 0$) ce taux s'écrit $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$
Interprétation graphique du taux de variation : Soit A le point de coordonnées $(a, f(a))$ et B le point de coordonnées $(b, f(b))$ Le coefficient directeur de la droite (AB) est égal à $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ c'est-à-dire à $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ Le taux de variation entre $x = a$ et $x = b$ est donc égal au coefficient directeur de la droite (AB) où A est le point de la courbe d'abscisse a et B le point de la courbe d'abscisse b		
Exemple	Le taux de variation de la fonction $f: x^2 - 3x + 2$ entre 4 et 7 est égal à $\frac{f(7)-f(4)}{7-4} = \frac{30-6}{7-4} = \frac{24}{3} = 8$ C'est aussi le coefficient directeur de la droite (AB) sécante à la courbe représentative de f en $A(4; 6)$ et $B(7; 30)$ est égal à 8	
Remarque	Ce taux de variation se note parfois $\frac{\Delta f}{\Delta x}(a, b)$	

Nombre dérivé

Définition	Nombre dérivé	Soit h un réel non nul suffisamment petit pour que $a + h \in I$. On dit que f est dérivable en a si et seulement si le taux de variation de f entre a et $a + h$ tend vers un unique nombre réel lorsque h tend vers 0. Ce nombre est appelé nombre dérivé et est noté $f'(a)$. $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$
Remarque	On peut aussi dire que f est dérivable en a si et seulement si le taux de variation entre a et x tend vers un unique nombre réel $f'(a)$ lorsque x tend vers a. $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$	
Exemples :	On considère la fonction $f: x \mapsto x^2$ et $a = 3$. Que vaut $f'(3)$? $\frac{\Delta f}{\Delta x}(3, 3+h) = \frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \frac{(3+h)^2-3^2}{h} = \frac{3^2+h^2+6h-3^2}{h} = \frac{h^2+6h}{h} = h+6$ $f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} h+6 = 6$	
	On considère la fonction $g: [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto \sqrt{x}$	$\frac{\Delta g}{\Delta x}(0, 0+h) = \frac{\sqrt{h}-\sqrt{0}}{h-0} = \frac{1}{\sqrt{h}}$ Je remarque que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta g}{\Delta x}(0, 0+h) = +\infty$. Lorsque h tend vers 0 $\frac{\Delta g}{\Delta x}(0, 0+h)$ devient de plus en plus grand et ne tend pas vers un réel. Nous en déduisons que la fonction g n'est pas dérivable en 0.
Propriété	Le nombre dérivé nous permet d'écrire l'approximation $f(a+h) \approx f(a) + hf'(a)$	

Interprétation géométrique du nombre dérivé			
Définition	Soit f une fonction dérivable en a, $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative, A le point de $\mathcal{C}_f$ de coordonnées $(a, f(a))$ et B le point de coordonnées $(a + h, f(a + h))$ Lorsque le point B se rapproche du point A, la corde (AB) se rapproche d'une droite passant par A et tangente à la courbe. On appelle cette droite la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A. Le coefficient directeur de la droite (AB) est égal à $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ Lorsque le point B se rapproche du point A cela signifie que $h \rightarrow 0$ Nous en déduisons que le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A est égal à $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ soit par définition au nombre dérivé $f'(a)$. En résumé : Le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse a est égal à $f'(a)$, c'est-à-dire : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$		
	Exemple	La courbe représentative de la fonction $g: x \rightarrow x^2$ est une parabole que l'on nommera $\mathcal{P}$. Si on place sur cette courbe $\mathcal{P}$, le point d'abscisse 3, alors la droite passant par A et qui a pour coefficient directeur 6 (rappel $f'(3) = 6$) est la tangente à $\mathcal{P}$ en A au point d'abscisse 3.	
	Propriété	L'équation réduite de la tangente est : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.	
	Démonstration		
Nous savons que $f'(a)$ représente le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse $x = a$ L'équation de la tangente peut donc s'écrire $y = f'(a)x + p$ avec p nombre réel quelconque. Or nous savons que cette tangente passe par le point de coordonnées $(a, f(a))$. Nous pouvons donc écrire : $f(a) = f'(a)a + p \rightarrow p = f(a) - af'(a)$ Remplaçons p dans la première équation il vient : $y = f'(a)x + f(a) - af'(a) \rightarrow y = f'(a)(x - a) + f(a)$			
Exemple	L'équation réduite de la tangente à la courbe de $g: x \rightarrow x^2$ en $x = 3$ est : $y = f'(3)(x - 3) + f(3) = 6(x - 3) + 9 = 6x - 9$		