

Modélisation quadratique	
Contexte	Jusqu'ici, on a modélisé des situations à l'aide de fonctions affines (évolution à taux constant) ou de suites. Mais de nombreuses situations concrètes ne suivent pas une évolution linéaire : trajectoire d'un projectile, aire d'une surface en fonction d'une longueur, bénéfice d'une entreprise en fonction du prix de vente...
Exemple	On lance un objet ; sa hauteur $h(t)$ (en m) en fonction du temps t (en s) est donnée par : $h(t) = -5t^2 + 20t$ Ce n'est ni une fonction affine, ni une suite : c'est une fonction polynôme de degré 2 .
Définition	Une fonction polynôme de degré 2 (ou fonction du second degré) est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax^2 + bx + c \text{ avec } a \neq 0$

Allure de la courbe parabole											
Définition	La représentation graphique d'une fonction du second degré est une parabole .										
Exemple	À observer sur l'exemple (tracé à la calculatrice ou au logiciel) : la courbe de $h(t) = -5t^2 + 20t$ a une forme de « cloche » : elle monte, atteint un maximum, puis redescend symétriquement.										
Propriété	<table><tr><th>Signe de a</th><th>Allure de la parabole</th><th>Comportement</th></tr><tr><td>$a > 0$</td><td>tournée vers le haut (en U)</td><td>f admet un minimum</td></tr><tr><td>$a < 0$</td><td>tournée vers le bas (en cloche)</td><td>f admet un maximum</td></tr></table>		Signe de a	Allure de la parabole	Comportement	$a > 0$	tournée vers le haut (en U)	f admet un minimum	$a < 0$	tournée vers le bas (en cloche)	f admet un maximum
Signe de a	Allure de la parabole	Comportement									
$a > 0$	tournée vers le haut (en U)	f admet un minimum									
$a < 0$	tournée vers le bas (en cloche)	f admet un maximum									
Exemple	Dans notre exemple, $a = -5 < 0$ la parabole est tournée vers le bas, ce qui est cohérent (la hauteur monte puis redescend).										
Propriété	Toute parabole possède un axe de symétrie vertical , qui passe par un point particulier appelé le sommet de la parabole. Le sommet correspond au minimum (si $a > 0$) ou au maximum (si $a < 0$) de la fonction.										
Méthode	Comment trouver l'axe de symétrie sans formule ? La méthode à mettre en œuvre est la suivante : On cherche deux valeurs x_1 et x_2 telles que $f(x_1) = f(x_2)$ (deux points de même hauteur sur la courbe). Par symétrie, l'axe de symétrie est la droite verticale passant par le milieu de x_1 et x_2 .										
Exemple	Sur l'exemple : on remarque que $h(0) = 0$ et $h(4) = -5 \times 16 + 20 \times 4 = -80 + 80 = 0$. L'objet est donc à la même hauteur (le sol) en $t = 0$ et $t = 4$ L'axe de symétrie a donc pour abscisse : $t = \frac{0 + 4}{2} = 2$ Le sommet de la parabole a donc pour abscisse $t = 2$, et son ordonnée est : $h(2) = -5 \times 4 + 20 \times 2 = -20 + 40 = 20$ Le sommet est le point (2; 20): l'objet atteint sa hauteur maximale de 20 m à l'instant $t = 2$										

Forme factorisée																																	
Définition	Une racine d'une fonction f est une valeur x telle que $f(x) = 0$: c'est une abscisse de point d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses. Certains polynômes du second degré peuvent se mettre sous une forme dite factorisée de la forme : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$																																
Exemple	Sur l'exemple : on peut factoriser en mettant t en facteur commun : $h(t) = -5t^2 + 20t = -5t(t - 4)$ On lit directement les racines : $t = 0$ et $t = 4$ (ce qui confirme le calcul du paragraphe précédent, obtenu ici sans avoir eu besoin de deviner deux points de même image).																																
Méthode	Pour étudier le signe de $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ (avec $x_1 < x_2$), on utilise la règle du signe d'un produit, comme pour une fonction affine, mais avec deux facteurs.																																
Exemple	Sur l'exemple, $h(t) = -5t(t - 4)$ avec $a = -5 < 0$: <table><tr><td>t</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>0</td><td></td><td>4</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$-5t$</td><td></td><td>+</td><td>0</td><td>-</td><td></td><td>-</td><td></td></tr><tr><td>$t - 4$</td><td></td><td>-</td><td></td><td>-</td><td>0</td><td>+</td><td></td></tr><tr><td>$h(t)$</td><td></td><td>-</td><td>0</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td><td></td></tr></table> Interprétation physique : $h(t) \geq 0$ pour $t \in [0 ; 4]$: l'objet est en l'air (au-dessus du sol) entre les instants $t = 0$ et $t = 4$ secondes, ce qui est cohérent avec la situation.	t	$-\infty$		0		4		$+\infty$	$-5t$		+	0	-		-		$t - 4$		-		-	0	+		$h(t)$		-	0	+	0	-	
t	$-\infty$		0		4		$+\infty$																										
$-5t$		+	0	-		-																											
$t - 4$		-		-	0	+																											
$h(t)$		-	0	+	0	-																											
Propriété	Règle générale à retenir (cas $a > 0$: signe inversé) : • Entre les deux racines, $f(x)$ est du signe contraire de a. • À l'extérieur des racines, $f(x)$ est du signe de a.																																