Trigonométrie. Arcsin .

Arcsin

Définition

La restriction de la fonction sin sur $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ notée f et à valeurs dans $[-1;1]$ est bijective.
$(\forall x \in [0;\pi], f'(x) = \cos x$ on a donc $f'(x) > 0$, f est donc strictement monotone sur $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ et continue)
Elle admet donc une réciproque f^{-1} que nous appelerons arcsin
La fonction arcsin est donc définie de $[-1;1]$ dans $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$

Propriétés

$\forall x \in [-1;1], \sin(\arcsin x) = x$

$\forall x \in [-1;1], \cos(arcsin\ x) = \sqrt{1-x^2}$

Preuve

Découle directement de la définition.

$\forall x \in [-1;1]\ \cos^2(\arcsin x) + \sin^2(\arcsin x) = 1$
$\forall x \in [-1;1]\ x^2 + \cos^2(\arcsin x) = 1$
$\forall x \in [-1;1]\ \cos^2(\arcsin x) = 1 - x^2$
$\arcsin x \in [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ donc $\cos(arcsin\ x) \geq 0$
$\forall x \in [-1;1], \cos(arcsin\ x) = \sqrt{1-x^2}$ ▫

Propriétés

$\forall x \in [-1;1],\ arcsin\ (-x) = -arcsin(x)$. La fonction est impaire.

Preuve

$\forall x \in [-1;1],\quad \sin(\ -\arcsin(x)) = -\sin\ \arcsin\ (x) = -x$
$\forall x \in [-1;1]\ \sin(\ arcsin\ (-x)\ ) = -x$
$-\arcsin(x)$ et $arcsin\ (-x)$ sont deux réels de l'intervalle $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ ayant même sinus. La fonction sin étant bijective sur cet intervalle nous en déduisant que $-\arcsin(x) = \arcsin(-x)$ ▫

Remarque

Attention $\arcsin(\sin x)$ n'est pas toujours égal à x. Exemple $\arcsin\left(\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{\pi}{6}$

Propriété

La fonction arcsin est continue sur $[-1;1]$ mais dérivable sur $]-1;1[$

$$\forall x \in]-1;1[\ \ (arcos(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Preuve

La fonction arcsin est la réciproque d'une fonction continue et monotone sur $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ à valeurs dans $[-1;1]$
On en déduit la continuité de arcsin sur $[-1\ ;1]$
Soit f définie par $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right], f(x) = \sin x\,.\,f'(x) = \cos x$, f' ne s'anule pas sur $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$
Donc f étant une bijection de $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$sur $]-1;1[$ dont la dérivée ne s'annule pas, il vient f^{-1} donc $arcsin$ dérivable sur $]-1;1[$

$$\forall x \in]-1;1[\ \ (arcsin(x))' = (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\cos arcsin\ x} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$ ▫

La non dérivabilité en 1 et -1 peut s'établir en calculant $\lim\limits_{h\to 1} \frac{\arcsin(1+h) - arcsin\ 1}{h}$ que nous ne ferons pas ici.

Courbe

