Trigonométrie. Arctan.

Arctan

Définition

La restriction de la fonction tan sur $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ notée f et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est bijective.
$(\forall x \in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[, f'(x) = 1+\tan^2 x$ on a donc $f'(x) > 0$, f est donc strictement monotone sur $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ et continue)
Elle admet donc une réciproque f^{-1} que nous appelerons $\arctan$
La fonction $\arctan$ est donc définie de $\mathbb{R}$ dans $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$

Propriétés

$\forall x \in \mathbb{R}, \tan(\arctan x) = x$

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(arctan\ x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

Preuve

Découle directement de la définition.

$\forall x \in \mathbb{R}\ 1+\tan^2(\arctan x) = \frac{1}{cos^2(\arctan x)}$
(Rappel : $1+tan^2 x = \frac{1}{cos^2 x}$)
$\forall x \in \mathbb{R}, cos^2(\arctan x) = \frac{1}{(1+tan^2(\arctan x))}$
$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos^2(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}$
$\arctan x \in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ donc $\cos(arctan\ x) \geq 0$
$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(arctan\ x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ ▫

Propriétés

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(arctan\ x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

$\forall x \in \mathbb{R},, \ arctan\ (-x) = -arctan(x)$. La fonction est impaire.

Preuve

$\forall x \in \mathbb{R}, \cos^2(arctan\ x) + \sin^2(arctan\ x) = 1$
$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin^2(arctan\ x) = 1-\cos^2(arctan\ x)$
$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin^2(arctan\ x) = 1-\frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2}$
Si $x \leq 0, \arctan x \in]-\frac{\pi}{2};0]$, donc $\sin x \leq 0$
Si $x \geq 0, \arctan x \in]0;\frac{\pi}{2}]$, donc $\sin x \geq 0$
Donc $\sin\ (arctan\ x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ ▫

$\forall x \in \mathbb{R}, \tan(-\arctan(x)) = -\tan\ \arctan\ (x) = -x$
$\forall x \in \mathbb{R}, \tan(\arctan(-x)) = -x$
$-\arctan(x)$ et $arctan\ (-x)$ sont deux réels de l'intervalle $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ ayant même tan. La fonction tan étant bijective sur cet intervalle nous en déduisant que $-\arctan(x) = \arctan(-x)$ ▫

Remarque

Attention $\arctan(\tan x)$ n'est pas toujours égal à x. Exemple $\arctan\left(\tan\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right) = \arctan\left(\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{\pi}{6}$

Propriété

La fonction $\arctan$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \left(arctan(x)\right)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Preuve

La fonction $\arctan$ est la réciproque d'une fonction continue et monotone sur $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$
On en déduit la continuité de $\arctan$ sur $\mathbb{R}$
Soit f définie par $\forall x \in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[, f(x) = \tan x . f'(x) = 1+tan^2 x$, f' ne s'anule pas sur $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$
Donc f étant une bijection de $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$ dont la dérivée ne s'annule pas, il vient f^{-1} donc $arctan$ dérivable sur $\mathbb{R}$

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \left(arctan(x)\right)' = (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)} = \frac{1}{\cos^2 arctan\ x} = \frac{1}{1+x^2}$$ ▫

.

Courbe

